

総合問題

1 ※ 問題文は教科書 178 ページを参照

【指針】 (2) $\vec{a} \circ \vec{b}$ を変形して $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表す。(3) $\vec{a} \circ \vec{b}$ の定義式や(2)で求めた式 $\vec{a} \circ \vec{b} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ を用いて式や条件を変形し、常に成り立つか、成り立たない場合があるかを確かめる。【解答】 (1) 平行でない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とする。

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \text{ であるから, } \vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \text{ は}$$

 $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ となる点 C をとると, 平行四辺形 OACB の面積を表す。

よって (工) 図

【参考】 (イ) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角の正弦は $\sin \theta = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ で表される。よって, $|\vec{a}| \neq 1$ または $|\vec{b}| \neq 1$ のとき, $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角の正弦と $\vec{a} \circ \vec{b}$ は等しくない。(ウ) 線分 OA, OB の長さの積は $|\vec{a}| |\vec{b}|$ である。 $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ から, $\sin \theta \neq 1$ のとき, 線分 OA, OB の長さの積と $\vec{a} \circ \vec{b}$ は等しくない。(2) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき, $\sin \theta > 0$ であるから $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \vec{a} \circ \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \end{aligned}$$

 $\theta = 0^\circ$ または $\theta = 180^\circ$ のときもこの式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{また } |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \end{aligned}$$

よって $\vec{a} \circ \vec{b} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ 図(3) (A) $\vec{a} \neq \vec{0}$ のとき, $\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は 0° であるから

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \sin 0^\circ = 0$$

よって, 常には成り立たない。

(B) 常に成り立つ。

(C) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ とする。

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} &= |(a_1 + b_1)c_2 - (a_2 + b_2)c_1| \\ &= |(a_1 c_2 - a_2 c_1) + (b_1 c_2 - b_2 c_1)| \\ \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c} &= |a_1 c_2 - a_2 c_1| + |b_1 c_2 - b_2 c_1| \end{aligned}$$

ゆえに, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ と $b_1 c_2 - b_2 c_1$ の符号が異なるときは, $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c}$ と $\vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$ は一致しない。

よって, 常には成り立たない。

- (D) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。
 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると、 $-\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は $180^\circ - \theta$ である。
 このとき

$$(-\vec{a}) \circ \vec{b} = |-\vec{a}| |\vec{b}| \sin(180^\circ - \theta) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \vec{a} \circ \vec{b} \neq -\vec{a} \circ \vec{b}$$

よって、常には成り立たない。

- (E) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \perp \vec{b}$ のとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ は 90° であるから
 $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin 90^\circ = |\vec{a}| |\vec{b}| \neq 0$

よって、常には成り立たない。

- (F) $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ として、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。

$\vec{a} // \vec{b}$ とすると、 $\theta = 0^\circ$ または $\theta = 180^\circ$ であるから $\sin \theta = 0$

ゆえに $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$

また、 $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ とすると $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0$

$|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0$ であるから $\sin \theta = 0$

よって、 $\theta = 0^\circ$ または $\theta = 180^\circ$ であるから $\vec{a} // \vec{b}$

したがって、常に成り立つ。

以上から、常に成り立つものは (B), (F) 答

2 ※ 問題文は教科書 179 ページを参照

指針 (2) $\triangle ABC$ は xy 平面上にあるから H の z 座標は 0 となる。また、
 $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形であるから H は線分 BC の中点。

- (3) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ から x 座標が、 $\vec{AC} \cdot \vec{AD}$ から y 座標が求められる。

さらに、 $AD = 4$ から z 座標が求められる。

- (4) $|\vec{OA}| = |\vec{OD}|$ から k の値が求められる。

解答 (1) $OA = OB = OC = r, \angle OHA = \angle OHB = \angle OHC = 90^\circ$ であるから

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

$$CH^2 = OC^2 - OH^2 = r^2 - OH^2$$

ゆえに、 $AH^2 = BH^2 = CH^2$ から $AH = BH = CH$

よって、 H は $\triangle ABC$ の外心である。 終

- (2) $\triangle ABC$ は $\angle BAC = 90^\circ$ の直角三角形であるから、 BC を直径とする円が
 $\triangle ABC$ の外接円である。

よって、外心 H は BC の中点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ である。 答

- (3) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos \angle BAD$ から $x = 1 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 2$

また、 $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos \angle CAD$ から $3y = 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$

ゆえに、 $3y = 6$ から $y = 2$

$AD = 4$ から $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

$x=2, y=2$ を代入すると $z^2=8$

よって, $z \geq 0$ から $z=2\sqrt{2}$

したがって $x=2, y=2, z=2\sqrt{2}$

すなわち, D の座標は $(2, 2, 2\sqrt{2})$ 答

$$(4) \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HO} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) + k(0, 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, k\right)$$

すなわち, $O\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, k\right)$ と表すことができる。

ゆえに, $OA=OD$ から

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + k^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + (2\sqrt{2} - k)^2$$

よって, $8 - 4\sqrt{2}k = 0$ から $k = \sqrt{2}$

これより, O の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{2}\right)$ 答

また, 球の半径 r は $r = OA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 答

3 ※ 問題文は教科書 180 ページを参照

指針 (1) 印 A, 印 B の位置を表す複素数をそれぞれ z_1, z_2 とすると, 点 z_1 は点 α を, 点 β を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であり, 点 z_2 は点 α を, 点 γ を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点である。

$$(2) (1) \text{で求めた } \delta \text{ を用いると } \frac{\gamma - \delta}{\beta - \delta} = \frac{i+1}{i-1} = -i$$

解答 (1) 印 A, 印 B の位置を表す複素数を, それぞれ z_1, z_2 とする。

点 z_1 は, 点 α を, 点 β を中心として $-\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned} z_1 - \beta &= \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} (\alpha - \beta) \\ &= \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

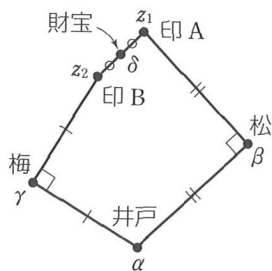
ゆえに $z_1 = (\beta - \alpha)i + \beta$

また, 点 z_2 は, 点 α を, 点 γ を中心として $\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点であるから

$$z_2 - \gamma = \left\{ \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} \right\} (\alpha - \gamma)$$

よって $z_2 = (\alpha - \gamma)i + \gamma$

点 δ は, 2 点 z_1, z_2 を結んでできる線分の中点であるから



$$\delta = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{(\beta - \alpha)i + \beta + (\alpha - \gamma)i + \gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}i + \frac{\beta + \gamma}{2}$$

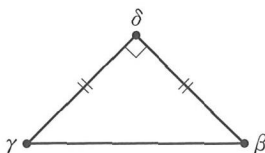
したがって、 δ は α を用いずに表すことができる。 [終]

$$(2) \frac{\gamma - \delta}{\beta - \delta} = \frac{\gamma - \left(\frac{\beta - \gamma}{2}i + \frac{\beta + \gamma}{2} \right)}{\beta - \left(\frac{\beta - \gamma}{2}i + \frac{\beta + \gamma}{2} \right)} = \frac{i + 1}{i - 1} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

また、 $\left| \frac{\gamma - \delta}{\beta - \delta} \right| = 1$ から $|\gamma - \delta| = |\beta - \delta|$

ゆえに、3点 β , γ , δ を結んでできる三角形は、2点 β , γ を結んでできる線分を底辺とする直角二等辺三角形である。

よって、財宝は、2点 β , γ を結んでできる線分を底辺とする直角二等辺三角形の頂点の位置にある。 [終]



4 ※ 問題文は教科書 181 ページを参照

指針 (3) 点 P における C_1 , C_2 の接線の傾き $-\frac{16x_1}{a^2y_1}$, $\frac{b^2x_1}{4y_1}$ の積が -1 になることを示す。

(4) $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ とおくと $c = \sqrt{a^2 - 16}$

(5) 接線とそれぞれの漸近線の方程式を連立させて解く。

解答 (1) C_1 の焦点の座標は $(\sqrt{a^2 - 16}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - 16}, 0)$

C_2 の焦点の座標は $(\sqrt{4 + b^2}, 0)$, $(-\sqrt{4 + b^2}, 0)$

C_1 と C_2 は 2 つの焦点を共有しているから $a^2 - 16 = 4 + b^2$

よって $b^2 = a^2 - 20$ [答]

(2) (1) から、 $P(x_1, y_1)$ は次の①, ②を満たす。

$$16x_1^2 + a^2y_1^2 = 16a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a^2 - 20)x_1^2 - 4y_1^2 = 4(a^2 - 20) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2} \times a^2 \text{ から } (4a^4 - 20a^2 + 64)x_1^2 = 4(a^4 - 20a^2) + 64a^2$$

$$\text{展開して整理すると } (a^2 - 4)(a^2 - 16)x_1^2 = 4a^2(a^2 - 4)$$

$a > 2\sqrt{5}$ より $a^2 - 4 \neq 0$, $a^2 - 16 \neq 0$ であるから

$$x_1^2 = \frac{4a^2}{a^2 - 16} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$x_1 > 0$ であるから $x_1 = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - 16}}$ [答]

また、③を①に代入して $\frac{64a^2}{a^2 - 16} + a^2y_1^2 = 16a^2$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad y_1^2 &= \frac{16(a^2-16)}{a^2-16} - \frac{64}{a^2-16} = \frac{16a^2-256-64}{a^2-16} \\ &= \frac{16a^2-320}{a^2-16} = \frac{16(a^2-20)}{a^2-16} \end{aligned}$$

$$y_1 > 0 \text{ であるから} \quad y_1 = 4\sqrt{\frac{a^2-20}{a^2-16}} \quad \text{答}$$

$$(3) \text{ 点 } P \text{ における } C_1, C_2 \text{ の接線の傾きは, それぞれ } -\frac{16x_1}{a^2y_1}, \frac{b^2x_1}{4y_1}$$

(1), (2)の結果を用いると

$$\begin{aligned} -\frac{16x_1}{a^2y_1} \cdot \frac{b^2x_1}{4y_1} &= -4 \cdot \frac{b^2}{a^2} \cdot x_1^2 \cdot \frac{1}{y_1^2} \\ &= -4 \cdot \frac{a^2-20}{a^2} \cdot \frac{4a^2}{a^2-16} \cdot \frac{a^2-16}{16(a^2-20)} = -1 \end{aligned}$$

よって, 2つの接線は直交する。終

$$(4) \text{ 点 } P \text{ における } C_1 \text{ の接線の方程式は } \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{16} - 1 = 0$$

$$\text{また, } F(c, 0), F'(-c, 0) \text{ とおくと } c = \sqrt{a^2-16}$$

このとき

$$FH = \frac{\left| \frac{x_1c}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{16}\right)^2}}, \quad F'H' = \frac{\left| -\frac{x_1c}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{16}\right)^2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} FH \cdot F'H' &= \frac{\left| \frac{x_1^2c^2}{a^4} - 1 \right|}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{16}\right)^2} = \frac{\left| \frac{4}{a^2} - 1 \right|}{\frac{4}{a^2(a^2-16)} + \frac{a^2-20}{16(a^2-16)}} \\ &= \frac{16(a^2-16)|4-a^2|}{64+a^2(a^2-20)} = \frac{16(a^2-16)(a^2-4)}{(a^2-16)(a^2-4)} = 16 \end{aligned}$$

よって, 2つの垂線の長さの積 $FH \cdot F'H'$ の値は一定である。終

$$(5) \text{ 点 } P \text{ における } C_2 \text{ の接線の方程式は } \frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$$

$$2 \text{ つの漸近線の方程式は } y = \frac{b}{2}x, \quad y = -\frac{b}{2}x$$

ここで, $\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ と $y = \frac{b}{2}x$ の交点 A の x 座標は, 方程式 $\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1x}{2b} = 1$ の解である。

$$(bx_1 - 2y_1)x = 4b \text{ から } x = \frac{4b}{bx_1 - 2y_1}$$

$$\text{これを } y = \frac{b}{2}x \text{ に代入すると } y = \frac{2b^2}{bx_1 - 2y_1}$$

ゆえに、A の座標は $\left(\frac{4b}{bx_1-2y_1}, \frac{2b^2}{bx_1-2y_1} \right)$

同様に、 $y = -\frac{b}{2}x$ との交点 B の座標は $\left(\frac{4b}{bx_1+2y_1}, -\frac{2b^2}{bx_1+2y_1} \right)$

よって、線分 AB の中点 M の座標を (x', y') とすると

$$x' = \frac{1}{2} \left(\frac{4b}{bx_1-2y_1} + \frac{4b}{bx_1+2y_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b^2x_1}{b^2x_1^2-4y_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b^2x_1}{4b^2} = x_1$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{2b^2}{bx_1-2y_1} - \frac{2b^2}{bx_1+2y_1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b^2y_1}{b^2x_1^2-4y_1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8b^2y_1}{4b^2} = y_1$$

したがって、点 P は線分 AB の中点である。 $\square$ 終